Aula 1 - Princípios e Técnicas Basicas de Combinatónia

O que é combinatória extremal?

É o campo da combinatória que lida com problemas do seguinte tipo: se uma coleção finita de objetos (números, grafos, vetores, conjuntos) satisfazem certas restrições, quão grande ou quão pequeno podem ser os objetos dessa coleção.

Princípio da casa dos Pombos

Se há $n+1$ pombos a serem distribuídos em n casas, então há uma casa com ao menos dois pombos.

Princípio generalizado da casa dos Pombos

Se há n pombos a serem distribuídos em k casas, $k < n$, então há uma casa com ao menos $\lceil n/k \rceil$ pombos

Suponha para uma contradição que isso não é verdade e seja c_i a quantidade de pombos na casa i. Para simplificar, assuma que $n \not\equiv 0 \pmod{k}$. Então $c_i < \lceil n/k \rceil \Rightarrow c_i < \frac{n}{k}$.
Portanto

$$n = \sum_{i=1}^{k} c_i < \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{k} = n \qquad \square$$

O princípio da casa dos pombos diz respeito a partições de conjunto. Uma partição de um conjunto V é uma família $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ de subconjuntos de V, as partes ou classes da partição, tal que cada elemento de V está em exatamente um elemento da partição, i.e.,

$$\bigcup_{i=1}^{k} V_i = V \quad \text{e} \quad V_i \cap V_j = \emptyset \quad \text{para todo } i \neq j$$

Def. $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ e, dado um $n \in \mathbb{N}$, definimos $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$

Uma outra forma de interpretarmos partições é como uma coloração. Dados um $r \in \mathbb{N}$ e um conjunto V, uma r-coloração é uma função $c : V \to [r]$ que atribui cores de $[r]$ para cada elemento de V. Uma coloração de um conjunto V é uma r-coloração de V para algum $r \in \mathbb{N}$.

Exemplo

0 1 2 3 4 5 6

Partição definida pela 4-coloração $\{\{0,2,5\},\{1,3\},\{4\},\{6\}\}$

Seja $A \subseteq [n]$. Dizemos que A é <u>livre de soma</u> se, para quaisquer $x, y \in A$, temos $x + y \notin A$.

<u>Exemplos</u>

$$\{1, 2, 4, 7, 10\}$$

$$I = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\} \longrightarrow |I| = \lceil n/2 \rceil$$

Teo. Seja $n \in \mathbb{N}$. Se $A \subseteq [n]$ é livre de soma, então $|A| \leq \lceil n/2 \rceil$.

Demonstração

- Seja $A \subseteq [n]$. Vamos provar que se $|A| > \lceil n/2 \rceil$, então A $\bar{n}$ é livre de soma.
- Seja $m = \max A$ e $B = \{m - a : a \in A\} \setminus \{0\}$
- Note que $|A| = |B| + 1$ e $B \subseteq [n]$
- Por hipótese $|A| \geq \lceil n/2 \rceil + 1$, então

$A = \{1, 2, 4, 7, 10\}$

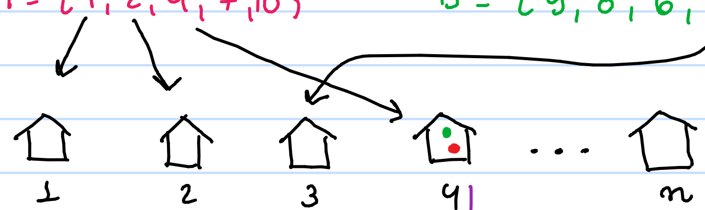
$B = \{9, 8, 6, 3, \cancel{0}\}$

$$|A| + |B| \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = 2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$$

$$\geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 = n + 1 > n$$

- Pelo princípio da casa dos pombos, existe $b \in A \cap B$

$A = \{1, 2, 4, 7, 10\}$ $B = \{9, 8, 6, 3\}$



Se uma casa tiver ao menos 2 pombos, então é um pombo de A e um pombo de B

- Como $b \in B \Rightarrow \exists\, a \in A$ tal que $b = m - a$
- Como $a, b, m \in A$ e $a + b = m$, o conj. A <u>não</u> é livre de soma

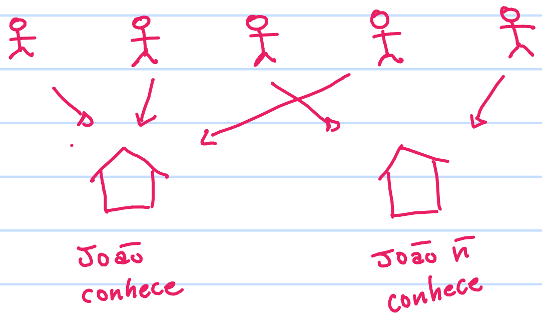
absurdo

Teo Em uma festa com 6 convidados, há 3 convidados que se conhecem mutuamente, ou três que ñ se conhecem mutuamente

Demo

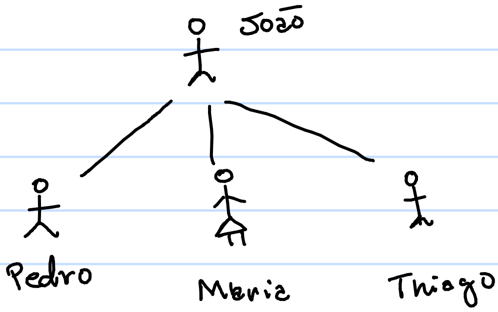
Seja João um dos 6 convidados.

Pelo princípio da casa dos pombos generalizado, temos duas possibilidades: (1) João conhece ao meno 3 pessoas; ou (ii) João ñ conhece ao menos 3 pessoas



Por simetria, suponha que o primeiro caso acontece.

Sejam Pedro, Maria e Thiago 3 pessoas conhecidas por João.



Se existem duas pessoas $A, B \in \{\text{Pedro}, \text{Maria}, \text{thiago}\}$ que se conhecem, então A, B, junto de João, formam três pessoas que se conhecem e o resultado segue. Se essas pessoas A, B ñ existem, então Pedro, Maria e Thiago são 3 pessoas que mutuamente ñ se conhecem e o resultado segue. $\square$

OBS: Esse problema faz parte da área de pesquisa conhecida por Teoria de Ramsey.

Contagem Dupla

A contagem dupla se baseia no seguinte fato óbvio: se os elementos de um conjunto são contados de duas formas distintas, o resultado é o mesmo.

Para $n \in \mathbb{N}$ e $k \geq 0$, escrevemos $\binom{n}{k}$ para denotar a quantidade de subconjuntos de $[n]$ de tamanho k.

Prop. $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Demo

Exercício.

Dados um conjunto X e um $k \in \mathbb{N}$, escrevemos $\binom{X}{k}$ para denotar todos os subconjuntos de X de tamanho k. Tal notação é justificada por

$$\left|\binom{X}{k}\right| = \binom{|X|}{k}$$

Teo (convolução de Vandermonde) Sejam $m, n, k \in \mathbb{N}$ com $k \leq m+n$. Então

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$$

Demo

- Seja S um conj de m bolas pretas e n bolas brancas
- Há $\binom{m+s}{k}$ formas de selecionar k bolas de S.
- Para $i \in \{0, \dots, k\}$, há $\binom{m}{i}$ maneiras de selecionar i bolas pretas e $\binom{n}{k-i}$ maneiras de selecionar $k-i$ bolas brancas
- Como todo conjunto de k bolas de S contém i bolas pretas, para algum $i \in \{0, \dots, k\}$, e $k-i$ bolas brancas, temos que a identidade segue $\square$

Teo Sejam $n, k \in \mathbb{N}$ com $k \leq n$. Então $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

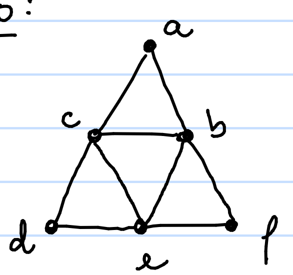
Demo

- Lado esquerdo conta a quantidade de subconjuntos de tamanho $k+1$ de um conjunto com $n+1$ elementos
- Lado direito também faz isso mas divide em dois casos.
- Seja x um elemento de $[n+1]$
  - $\binom{n}{k}$ conta a qntidade de subconjuntos que contém x.
  - $\binom{n}{k+1}$ conta a quantidade de subconjuntos que ñ contém x. $\square$

Grafo

Um grafo G é um par (V, E), onde V é um conj. finito de elementos chamados vértices e E é um conjunto de pares ñ ordenados de vértices chamados arestas.

Exemplo:



$V = \{a, b, c, d, e, f\}$

$E = \{ab, ac, bc, be, bf, ce, cd, de, ef\}$

Dado um grafo $G = (A, B)$, definimos

- $V(G) = A$ (conj. de vértices)
- $E(G) = B$ (conj. de arestas)
- $v(G) = |V(G)|$ (o número de vértices)
- $e(G) = |E(G)|$ (o número de arestas)

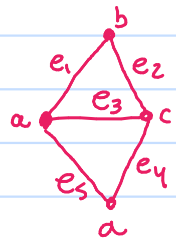
Dados um grafo G e um vértice $u \in V(G)$, o <u>grau</u> de u em G, denotado por $d_G(u)$, é o número de arestas que contém o vértice u.

Lema do Aperto de Mãos Dado um grafo G, temos que $\sum_{u \in V(G)} d(u) = 2e(G)$.

Demo.

Seja M uma matriz $v(G) \times e(G)$ tal que

$$M[u][e] = \begin{cases} 1 & \text{se } e = uv \\ 0 & \text{se } e = xy \text{ e } x \neq u \text{ e } y \neq u \end{cases}$$



M

$$\begin{array}{c|ccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \hline a & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ b & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

- Seja X a soma de todas as entradas de M, i.e.,

$$X = \sum_{u \in V(G)} \sum_{e \in E(G)} M[u][e]$$

- Para um $u \in V(G)$ fixo, temos que $\sum_{e \in E(G)} M[u][e] = d(u)$. Logo

$$X = \sum_{u \in V(G)} d(u) \qquad (A)$$

- Para um $e \in E(G)$ fixo, temos que $\sum_{u \in V(G)} M[u][e] = 2$. Logo

$$X = \sum_{u \in V} \sum_{e \in E} M[u][e] = \sum_{e \in E} \sum_{u \in V} M[u][e] = \sum_{e \in E} 2 = 2e(G) \qquad (B)$$

- O resultado segue por (A) e (B). $\square$

Indução

Para provar algo da forma $\forall x \in \mathbb{N}\ P(x)$

$$P(x) = \text{“ } x \text{ é um homem”}$$
$$Q(x) = \text{“ } x \text{ é mortal”}$$
$$R(y) = \text{“ } y \text{ é primo”}$$

Versão 1

Base: provamos $P(1)$

Passo: provemos $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Versão 2

Base: provamos $P(1)$

Passo: provemos $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\ P(n-1) \Rightarrow P(n)$

Versão 3 (Para provar algo da forma $\forall x \in \mathbb{N}$ e $x \geq n_0$ $P(x)$)

Base: provamos $P(n_0)$

Passo: provamos $\forall n \in \mathbb{N}$ e $n > n_0$ $P(n-1) \Rightarrow P(n)$

Indução Forte

Base: provamos $P(n_0), P(n_0+1), \ldots, P(n_1)$

Passo: $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N},\ n_0 \leq k < n,\ P(k) \Rightarrow P(n)$

↳ Você assume que o predicado vale para todo problema menor

Proposição Desigualdade de Bernoulli

Se $n \in \mathbb{N}$ e $x > -1$, então $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Demo

- Fixe $x > -1$
- A prova segue por indução em n
- Base: $n = 1$

$$(1+x)^n = (1+x)^1 = 1 + x \geq 1 + 1x = 1 + nx$$

- Passo: $n \geq 2$
- Pela hipótese de indução, sabemos que $(1+x)^{n-1} \geq 1 + (n-1)x$.
- Portanto

$$
\begin{aligned}
(1+x)^n &= (1+x)^{n-1}(1+x) \\
&\geq [1+(n-1)x](1+x) \\
&= 1 + (n-1)x + x + (n-1)x^2 \qquad \longrightarrow \text{positivo} \\
&= 1 + xn \cancel{-x} \cancel{+x} + (n-1)x^2 \\
&\geq 1 + xn
\end{aligned}
$$

$\square$

Vamos convencionar que $0^0 = 1$.
Tal convenção faz sentido combinatório pois m^n conta a quantidade de funções $f : [n] \to [m]$ e existe uma única função $f : \emptyset \to \emptyset$.

Teorema Binomial Se $n \in \mathbb{N}$ e $x, y \in \mathbb{R}$, então

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Demo
Prova segue por indução em n
Base $n = 1$

$$(x+y)^n = (x+y)^1 = x + 1 \qquad (A)$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} &= \binom{n}{0} x^0 y^{1-0} + \binom{n}{1} x^1 y^{1-1} \qquad (B) \\
&= 1 \cdot 1 \cdot y^1 + 1 \cdot x \cdot 1 \\
&= x + y
\end{aligned}
$$

A base segue por (A) e (B).

Passo $n \geq 2$

- Por hipótese de indução $(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{(n-1)-k}$
- Assim,

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n = (x+y)^{n-1}(x+y) &= \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{(n-1)-k}\right](x+y) \\
&= x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{(n-1)-k} + y \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{(n-1)-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} y^{n-(k+1)} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k} \qquad \text{reindexando} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k}
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k} y^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} x^{k} y^{n-k} + \binom{n-1}{n-1} \cdot x^{n} y^{n-n} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k} y^{n-k} + \binom{n-1}{0} x^{0} y^{n-0}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k-1} x^{k} y^{n-k} + \binom{n-1}{k} x^{k} y^{n-k} \right] + x^{n} + y^{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left[\left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right] x^{k} y^{n-k} \right] + x^{n} + y^{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^{k} y^{n-k} + x^{n} + y^{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^{k} y^{n-k} + \binom{n}{n} x^{n} y^{n-n} + \binom{n}{0} x^{0} y^{n-0}$$

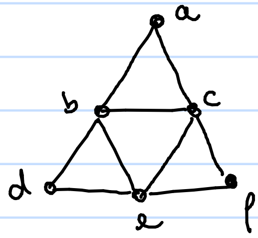
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k} y^{n-k} \qquad \square$$

Nomenclatura de Grafos

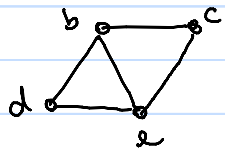
Dados um grafo G e um conjunto $S \subseteq V(G)$, definimos $G-S$ como sendo o grafo

$$V(G-S) = V(G) \setminus S$$
$$E(G-S) = \{ uv \in E(G) : u, v \notin S \}$$

Exemplo



G

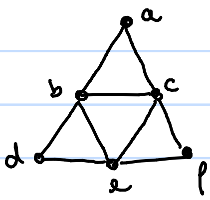


$G - \{a, f\}$

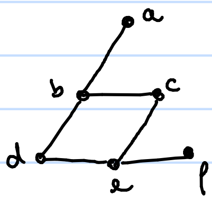
Dados um grafo G e um conjunto $F \subseteq E(G)$, definimos $G-F$ como sendo o grafo

$$V(G-F) = V(G)$$
$$E(G-F) = E(G) \setminus F$$

Exemplo

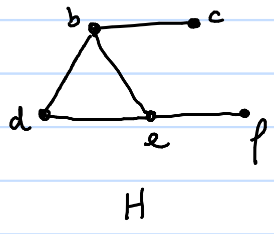


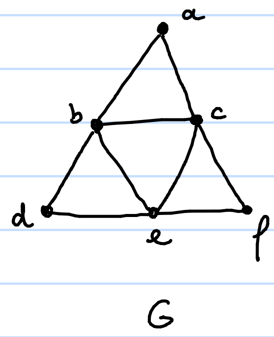
G



$G - \{ac, be, cf\}$

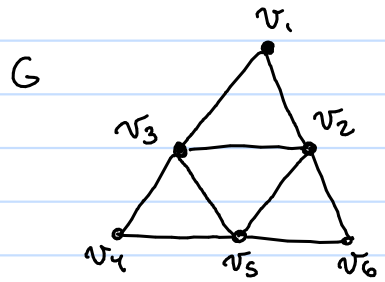
Dizemos que um grafo $H=(A,B)$ é um subgrafo de um grafo $G=(X,Y)$ denotado por $H \subseteq G$, se $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$.





- Um passeio em um grafo G é uma sequência de vértices $u_1, u_2, \dots, u_\ell$ tal que $u_i \in V(G)$ para todo $1 \leq i \leq \ell$ e $u_i u_{i+1} \in E(G)$ para todo $1 \leq i < \ell$.
- Se $P = u_1, u_2, \dots, u_\ell$ é um passeio, então dizemos que u_1 e u_ℓ são os extremos de P, $u_2, \dots, u_{\ell-1}$ são os vértices internos, e $V(P) = \{u_1, u_2, \dots, u_\ell\}$.
- Dizemos que um Passeio $P = u_1 u_2 \cdots u_\ell$ é um caminho se todos os vértices da sequência são distintos
- Um (x,y)-caminho é um caminho cujos extremos são os vértices x e y.

Exemplo

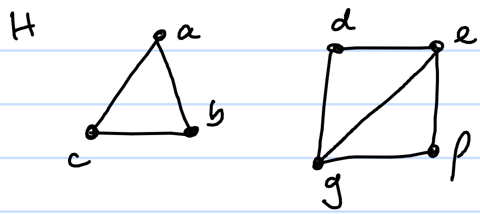


$P = v_2, v_3, v_5, v_4$

Caminho P

(v_2, v_4) - Caminho P

G é um grafo conexo!



H é desconexo!

Veja como ñ há passeio entre a e g.

Um grafo G é conexo se existe um (x,y)-caminho para todo $x, y \in V(G)$. Caso contrário, dizemos que G é desconexo.

O grau mínimo de G, denotado por $\delta(G)$, é $\min\{d(u) : u \in V(G)\}$.

Teo Se G é um grafo conexo com n vértices, então $e(G) \geq n-1$.

Demo

A prova segue por indução em n

Base $n=1$

- Se $n=1$, então G possui apena um vértice e o resultado segue de forma trivial.

Passo $n \geq 2$

- Se $\delta(G) \geq 2$, então pelo lema do aperto demãos

$$2n = \sum_{u \in V(G)} 2 \leq \sum_{u \in V(G)} d(u) = 2e(G)$$

- Logo, $n \leq e(G)$ e o resultado segue.

- Assim, suponha que $\delta(G)=1$ e seja $u \in V(G)$ tal que $d(u)=1$.
- Seja $G' = G-u$ e note que $v(G') < n$.
- Nós afirmamos que G' é conexo.
- Suponha para uma contradição que G' ñ é conexo, então existem vértices $x,y \in V(G')$ tais que ñ há um (x,y)-passeio em G'.
- Como G é conexo, sabemos que existe um (x,y)-passeio P em G.
- Como $G' \subseteq G$ e P ñ é um caminho em G', temos que $u \in V(P)$ e como $u \neq x$ e $u \neq y$, temos que u é um vértice interno de P. Logo $d_G(u) \geq 2$, um absurdo.
- Assim G' é conexo
- Pela hipótese de indução $e(G') \geq v(G') - 1$

- Note que $e(G') = e(G) - 1$ e $v(G') = v(G) - 1$
- Portanto

$$e(G) = e(G') + 1 \geq v(G') - 1 + 1 = v(G) - 1 \qquad \square$$

Teo todo inteiro maior que 1 é o produto de um ou mais números primos.

Demo

- Seja $\mathcal{P}$ o conj. dos números primos e seja n um inteiro maior que 1
- A prova segue por indução em n.

Base: $n \in \mathcal{P}$

- o resultado segue trivialmente

Passo: $n \notin \mathcal{P}$

- Consequentemente $n \geq 4$
- Como n ñ é primo, temos que existem $l, k \in \mathbb{N}$ tais que $n = lk$
- Como $l, k < n \Rightarrow k = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{a_p}$ e $\prod_{p \in \mathcal{P}} p^{b_p}$
- Assim

$$n = kl = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{a_p} \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{b_p} = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{a_p + b_p}$$

$\square$